2023 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的．

1. 曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A. $y=x+\mathrm{e}$.　　B. $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

C. $y=x$.　　D. $y=x-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为

A. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

3. 已知 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足：$x_1=y_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$y_{n+1}=y_n^2\,(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，

A. x_n 是 y_n 的高阶无穷小．

B. y_n 是 x_n 的高阶无穷小．

C. x_n 与 y_n 是等价无穷小．

D. x_n 与 y_n 是同阶但不等价的无穷小．

4. 若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0$.　　B. $a>0,b>0$.

C. $a=0,b>0$.　　D. $a=0,b<0$.

5. 设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则

A. $f(x)$ 连续，$f'(0)$ 不存在．

B. $f'(0)$ 存在，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．

C. $f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在．

D. $f''(0)$ 存在，$f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．

6. 若函数 $f(\alpha)=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值，则 $\alpha_0=$

A. $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$.　　B. $-\ln(\ln 2)$.　　C. $\frac{1}{\ln 2}$.　　D. $\ln 2$.

7. 设函数 $f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$，若 $f(x)$ 没有极值点，但曲线 $y=f(x)$ 有拐点，则 a 的取值范围是

A. $[0,1)$.　　B. $[1,+\infty)$.　　C. $[1,2)$.　　D. $[2,+\infty)$.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=$

A. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

9. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2$.　　B. $y_1^2-y_2^2$.　　C. $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$.　　D. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

10. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\gamma}=$

A. $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.　　B. $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.　　C. $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.　　D. $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．

11. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=\mathrm{e}^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$ ________．

12. 曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的弧长为________．

13. 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $\mathrm{e}^z+xz=2x-y$ 确定，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$ ________．

14. 曲线 $3x^3=y^5+2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为________．

15. 设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$. 则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$ ________．

16. 已知线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\ x_1+ax_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ ax_1+bx_2=2\end{cases}$ 有解，其中 a,b 为常数. 若 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则 $\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$ ________．

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本题满分 10 分）

设曲线 $L:y=y(x)(x>\mathrm{e})$ 经过点 $(\mathrm{e}^2,0)$，L 上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距．

(1) 求 $y(x)$；

(2) 在 L 上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积．

18.（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{\cos y}+\frac{x^2}{2}$ 的极值．

19.（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant 1\right\}$.

(1) 求 D 的面积；

(2) 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

20.（本题满分 12 分）

设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $x^2+y^2-xy=1$，$x^2+y^2-xy=2$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$，$y=0$ 围成，计算 $\iint\limits_D\dfrac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

21.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数，证明：

(1) 若 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

22.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足：对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

答案速查

一、选择题

1. B.　2. D.　3. B.　4. C.　5. C.　6. A.　7. C.　8. D.　9. B.　10. D.

二、填空题

11. -2.　12. $\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$.　13. $-\frac{3}{2}$.　14. $-\frac{11}{9}$.　15. $\frac{1}{2}$.　16. 8.

三、解答题

17. (1) $y(x)=x(2-\ln x)(x>\mathrm{e})$; (2) 所求点为 $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$,最小面积为 e^{3}.

18. 极小值为 $f(-\mathrm{e},2k\pi)=-\frac{\mathrm{e}^2}{2}$,其中 k 为整数.

19. (1) $\ln(\sqrt{2}+1)$. (2) $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

20. $\frac{\sqrt{3}\ln 2}{24}\pi$.

21. 证明略.

22. (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$. (2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4&-1&0\\3&0&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$.

2022年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～10小题,每小题5分,共50分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x),\beta(x)$ 是非零无穷小量,给出以下四个命题:

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

其中所有真命题的序号是

A. ①③. B. ①④. C. ②③④. D. ①③④.

2. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x =$

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处具有2阶导数,则

A. 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时,$f'(x_0) > 0$.

B. 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时,$f''(x_0) > 0$.

C. 当 $f'(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.

D. 当 $f''(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

4. 设函数 $f(t)$ 连续,令 $F(x,y) = \int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$,则

A. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

B. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

C. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

D. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

5. 设 p 为常数,若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛,则 p 的取值范围是

A. $(-1,1)$. B. $(-1,2)$.

C. $(-\infty,1)$. D. $(-\infty,2)$.

6. 已知数列 $\{x_n\}$,其中 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$,则

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

7. 已知 $I_1=\int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$,则

A. $I_1<I_2<I_3$.　　B. $I_2<I_1<I_3$.

C. $I_1<I_3<I_2$.　　D. $I_3<I_2<I_1$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是

A. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$.　　B. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

C. 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.　　D. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情况为

A. 无解.　　B. 有解.

C. 有无穷多解或无解.　　D. 有唯一解或无解.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价,则 λ 的取值范围是

A. $\{0,1\}$.　　B. $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-2\}$.

C. $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.　　D. $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1\}$.

二、填空题:11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$ ________.

12. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定,则 $y''(1)=$ ________.

13. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=$ ________.

14. 微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解 $y(x)=$ ________.

15. 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$,则 L 围成有界区域的面积为________.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第2行和第3行,再将第2列的 -1 倍加到第1列,得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ________.

三、解答题:17～22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=2$,求 $f'(1)$.

18. (本题满分 12 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$ 满足条件 $y(1)=\frac{1}{4}$ 的解,求曲线 $y=y(x)(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$ 的弧长.

19. (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\}$,计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

20.(本题满分 12 分)

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)e^{-(u+v)}$,且 $f(u,0)=u^2e^{-u}$.

(1) 记 $g(x,y)=f(x,y-x)$,求$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$;

(2) 求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

21.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内具有 2 阶连续导数. 证明:$f''(x)\geqslant 0$ 的充分必要条件是:对不同的实数 a,b,$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

22.(本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 证明:$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

答案速查

一、选择题

1. D.　2. B.　3. C.　4. C.　5. A.　6. D.　7. A.　8. B.　9. D.　10. C.

二、填空题

11. $\sqrt{e}$.　12. $-\frac{31}{32}$.　13. $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$.　14. $C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + C_3$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

15. $\frac{\pi}{12}$.　16. -1.

三、解答题

17. $f'(1)=-1$.　18. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.　19. $2\pi-2$.

20. (1) $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=(4x-2y)e^{-y}$.

(2) $f(u,v)=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$. $f(u,v)$ 的极小值为 $f(0,0)=0$.

21. 证明略.

22. (1) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.　(2) 证明略.

2021 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________　分数________

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t$ 是 x^7 的

A. 等价无穷小.　　B. 低阶无穷小.

C. 高阶无穷小.　　D. 同阶但非等价无穷小.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A. 连续且取得极小值.　　B. 连续且取得极大值.

C. 可导且导数等于零.　　D. 可导且导数不为零.

3. 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s，-3 cm/s. 当底面半径为10 cm，高为 5 cm时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

A. $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}$，$-40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.　　B. $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}$，$40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.

C. $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}$，$40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.　　D. $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}$，$-40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.

4. 设函数 $f(x)=ax-b\ln x\,(a>0)$ 有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

A. $(0,e)$.　　B. $(e,+\infty)$.

C. $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.　　D. $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

5. 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则

A. $a=1,b=\dfrac{1}{2}$.　　B. $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$.

C. $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$.　　D. $a=0,b=\dfrac{1}{2}$.

6. 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $\mathrm{d}f(1,1)=$

A. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.　　B. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

C. $\mathrm{d}y$.　　D. $-\mathrm{d}y$.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 1,1.　　B. 2,0.　　C. 2,1.　　D. 1,2.

9. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，则

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

B. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

C. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

D. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

10. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$. 若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

13. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$ ________.

14. 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ________.

15. 微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

16. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

18.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

19.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 满足 $\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^2-x+C$，$L$ 为曲线 $y=f(x)(4\leqslant x\leqslant 9)$. 记 L 的长度为 s，L 绕 x 轴旋转所成旋转曲面的面积为 A，求 s 和 A.

20.（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$ 满足条件 $y(\sqrt{3})=10$ 的解.

(1) 求 $y(x)$；

(2) 设 P 为曲线 $y=y(x)$ 上一点，记曲线 $y=y(x)$ 在点 P 处的法线在 y 轴上的截距为 I_P. 当 I_P 最小时，求点 P 的坐标.

21.（本题满分 12 分）

设平面区域 D 由曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

22.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

答案速查

一、选择题

1. C.　2. D.　3. C.　4. B.　5. D.　6. C.　7. A.　8. A.　9. D.　10. C.

二、填空题

11. $\frac{1}{\ln 3}$.　12. $\frac{2}{3}$.　13. 1.　14. $\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}$.

15. $C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$，其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

16. -5.

三、解答题

17. $\frac{1}{2}$.

18. $y=f(x)$ 的凸区间为 $(-1,0)$，凹区间为 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$.

$x=-1$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线，$y=x-1$ 为曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线，$y=-x+1$ 为曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线.

19. $s=\frac{22}{3}$，$A=\frac{425}{9}\pi$.

20. (1) $y(x)=\frac{1}{3}x^6+1\ (x>0)$.　(2) $P\left(1,\frac{4}{3}\right)$.

21. $\frac{1}{48}$.

22. ① $a=1, b=1$. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.　② $a=-1, b=3$. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2020 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________　分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x\to0^+$ 时,下列无穷小中最高阶的是

A. $\int_0^x(e^{t^2}-1)dt$.　　B. $\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

C. $\int_0^{\sin x}\sin t^2dt$.　　D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt$.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

3. $\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$.　　B. $\dfrac{\pi^2}{8}$.　　C. $\dfrac{\pi}{4}$.　　D. $\dfrac{\pi}{8}$.

4. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$. 当 $n\geqslant3$ 时,$f^{(n)}(0)=$

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$.　　B. $\dfrac{n!}{n-2}$.　　C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$.　　D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$.

5. 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & xy\neq0,\\ x, & y=0,\\ y, & x=0,\end{cases}$ 给出以下结论:

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$;② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$;③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$;④ $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$.

其中正确的个数为

A. 4.　　B. 3.　　C. 2.　　D. 1.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导,且 $f'(x)>f(x)>0$,则

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$.　　B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$.

C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$.　　D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$.

7. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆,a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq0$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量,则

满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 可为

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

10. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,dx=$________.

11. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$,则 $\left.dz\right|_{(0,\pi)}=$________.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中,且斜边与水面相齐. 记重力加速度为 g,水的密度为 ρ,则该平板一侧所受的水压力为________.

13. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$,且 $y(0)=0,y'(0)=1$,则 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=$________.

14. 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

16. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1,g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

17. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

18. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$,并求曲线 $y=f(x)$,$y=\dfrac{1}{2}$,$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

19. (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=1,x=2,y=x$ 与 x 轴围成,计算 $\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy$.

20. (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$.

(1)证明:存在 $\xi\in(1,2)$,使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$;

(2)证明:存在 $\eta\in(1,2)$,使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

21.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$. 曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 经过坐标原点 O，其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T，又 MP 垂直 x 轴于点 P. 已知由曲线 $y=f(x)$，直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 $\triangle MTP$ 的面积之比恒为 $3:2$，求满足上述条件的曲线的方程.

22.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(1)求 a 的值；

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

23.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1)证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

(2)若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

答案速查

一、选择题

1. D.　2. C.　3. A.　4. A.　5. B.　6. B.　7. C.　8. D.

二、填空题

9. $-\sqrt{2}$.　10. $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$.　11. $(\pi-1)dx-dy$.　12. $\frac{1}{3}a^3\rho g$.　13. 1.　14. $a^2(a^2-4)$.

三、解答题

15. $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2e}$.　16. $g'(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du, & x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$ 证明略.

17. 极小值为 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.　18. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$, $V=\frac{\pi^2}{6}$.

19. $\frac{3}{4}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.　20. 证明略.

21. $y=Cx^3(C>0)$.　22. (1) $a=-\frac{1}{2}$.　(2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

23. (1) 证明略.　(2) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵.

2020年全国硕士研究生招生考试数学二试题

2019 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x\to 0$ 时,若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k=$

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

2. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<2\pi\right)$ 的拐点是

A. $(0,2)$. B. $(\pi,-2)$.

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right)$.

3. 下列反常积分发散的是

A. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$. B. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$. D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

4. 已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$,则 a,b,c 依次为

A. 1,0,1. B. 1,0,2.

C. 2,1,3. D. 2,1,4.

5. 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,记 $I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$,

$I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$,则

A. $I_3<I_2<I_1$. B. $I_2<I_1<I_3$.

C. $I_1<I_2<I_3$. D. $I_2<I_3<I_1$.

6. 设函数 $f(x),g(x)$ 的 2 阶导函数在 $x=a$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切及曲率相等的

A. 充分不必要条件. B. 充分必要条件.

C. 必要不充分条件. D. 既不充分又不必要条件.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$. B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$________.

10. 曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 轴上的截距为________.

11. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$，则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

12. 曲线 $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为________.

13. 已知函数 $f(x)=x\int_1^x\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

14. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 中 (i,j) 元的代数余子式，则 $A_{11}-A_{12}=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ xe^x+1, & x\leqslant0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

16.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int\dfrac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

(1)求 $y(x)$；

(2)设平面区域 $D=\{(x,y)\mid1\leqslant x\leqslant2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

18.（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid|x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

19.（本题满分 10 分）

设 n 是正整数，记 S_n 为曲线 $y=e^{-x}\sin x(0\leqslant x\leqslant n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积，求 S_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

20.（本题满分 11 分）

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，求 a,b 的值使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 之下，上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=1$. 证明：

(1)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$；

(2)存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$.

22.（本题满分 11 分）

已知向量组

Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a^2+3)^{\mathrm{T}}$；

Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a+3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,1-a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,3,a^2+3)^{\mathrm{T}}$.

若向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价，求 a 的取值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

23.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(1)求 x,y；

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

答案速查

一、选择题

1. C.　2. B.　3. D.　4. D.　5. A.　6. A.　7. A.　8. C.

二、填空题

9. $4e^2$.　10. $\frac{3\pi}{2}+2$.　11. $yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$.　12. $\frac{1}{2}\ln 3$.　13. $\frac{\cos 1-1}{4}$.　14. -4.

三、解答题

15. $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ e^x(x+1), & x<0.\end{cases}$

$f(x)$的极小值为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$，极大值为 $f(0)=1$.

16. $-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$.

17. (1) $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.　(2) $V=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$.

18. $\frac{43\sqrt{2}}{120}$.　19. $S_n=\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$.

20. $a=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{3}{4}$.　21. 证明略.

22. 当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$；当 $a\neq\pm1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

23. (1) $x=3, y=-2$.　(2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

2018 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________　分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则

(A)$a=\dfrac{1}{2},b=-1$.　　(B)$a=-\dfrac{1}{2},b=-1$.

(C)$a=\dfrac{1}{2},b=1$.　　(D)$a=-\dfrac{1}{2},b=1$.

(2)下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

(A)$f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B)$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C)$f(x)=\cos|x|$.　　(D)$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则

(A)$a=3,b=1$.　　(B)$a=3,b=2$.

(C)$a=-3,b=1$.　　(D)$a=-3,b=2$.

(4)设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则

(A)当 $f'(x)<0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$.　　(B)当 $f''(x)<0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$.

(C)当 $f'(x)>0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$.　　(D)当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$.

(5)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x,K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$，则

(A)$M>N>K$.　　(B)$M>K>N$.

(C)$K>M>N$.　　(D)$K>N>M$.

(6)$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$

(A)$\dfrac{5}{3}$.　　(B)$\dfrac{5}{6}$.　　(C)$\dfrac{7}{3}$.　　(D)$\dfrac{7}{6}$.

(7)下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

(A)$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(8)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X}\quad \boldsymbol{Y})$表示分块矩阵,则

(A)$r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　(B)$r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C)$r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D)$r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

(10)曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________.

(11)$\int_5^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$ ________.

(12)曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为________.

(13)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定,则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

(14)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组.若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为________.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分$\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=ax^2$.

(Ⅰ)求 $f(x)$;

(Ⅱ)若 $f(x)$在区间$[0,1]$上的平均值为 1,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线$\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴围成,计算二重积分$\iint\limits_D(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

已知常数 $k\geqslant\ln 2-1$.证明:$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geqslant 0$.

(19)(本题满分 10 分)

将长为 2 m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(20)(本题满分 11 分)

已知曲线 $L:y=\dfrac{4}{9}x^2(x\geqslant 0)$,点 $O(0,0)$,点 $A(0,1)$.设 P 是 L 上的动点,S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积.若 P 运动到点$(3,4)$时沿 x 轴正向的速度是 4,求此时 S 关于时间 t 的变化率.

(21)(本题满分 11 分)

设数列$\{x_n\}$满足:$x_1>0$,$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$.证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(22)(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中 a 是参数.

(Ⅰ)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(Ⅱ)求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

(23)(本题满分 11 分)

已知 a 是常数,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\1 & 3 & 0\\2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(D). (3)(D). (4)(D). (5)(C). (6)(C). (7)(A). (8)(A).

二、填空题

(9)1. (10)$y=4x-3$. (11)$\dfrac{\ln 2}{2}$. (12)$\dfrac{2}{3}$. (13)$\dfrac{1}{4}$. (14)2.

三、解答题

(15)$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{6}(\mathrm{e}^x+2)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$.

(16)(Ⅰ)$f(x)=2a(1-\mathrm{e}^{-x})$. (Ⅱ)$a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

(17)$\pi(5+3\pi)$. (18)证明略. (19)存在最小值,为$\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\ \mathrm{m}^2$. (20)10. (21)证明略.$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(22)(Ⅰ)当$a\neq2$时,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;当$a=2$时,$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$,其中$k$为任意常数.

(Ⅱ)当$a\neq2$时,$y_1^2+y_2^2+y_3^2$;当$a=2$时,$y_1^2+y_2^2$.

(23)(Ⅰ)$a=2$. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3\\-1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3\\k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数且$k_2\neq k_3$.

2017 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________　分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则

(A)$ab=\dfrac{1}{2}$.　(B)$ab=-\dfrac{1}{2}$.　(C)$ab=0$.　(D)$ab=2$.

(2)设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1$,$f(0)=-1$,且 $f''(x)>0$,则

(A)$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x>0$.　(B)$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x<0$.

(C)$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.　(D)$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

(3)设数列$\{x_n\}$收敛,则

(A)当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　(B)当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(C)当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　(D)当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(4)微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$

(A)$A\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　(B)$Ax\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(C)$A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　(D)$Ax\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

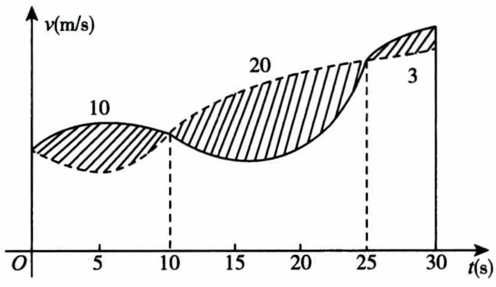
(5)设 $f(x,y)$具有一阶偏导数,且对任意的(x,y)都有$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则

(A)$f(0,0)>f(1,1)$.　(B)$f(0,0)<f(1,1)$.

(C)$f(0,1)>f(1,0)$.　(D)$f(0,1)<f(1,0)$.

(6)甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处. 图中,实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则

(A)$t_0=10$.　(B)$15<t_0<20$.　(C)$t_0=25$.　(D)$t_0>25$.



(7)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=$

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(8)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________.

(10)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t,\\y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$________.

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$________.

(12)设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$________.

(13) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx=$________.

(14)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(17)(本题满分 10 分)

求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

(18)(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(Ⅰ)方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Ⅱ)方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

(20)(本题满分 11 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分 $\displaystyle\iint_D(x+1)^2dxdy$.

(21)(本题满分 11 分)

设 $y(x)$是区间$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$内的可导函数,且 $y(1)=0$. 点 P 是曲线 $l:y=y(x)$上的任意一点,l 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点$(0,Y_P)$,法线与 x 轴相交于点$(X_P,0)$. 若 $X_P=Y_P$,求 l 上点的坐标(x,y)满足的方程.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$有 3 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

答案速查

一、选择题

(1)(A). (2)(B). (3)(D). (4)(C). (5)(D). (6)(C). (7)(B). (8)(B).

二、填空题

(9)$y=x+2$. (10)$-\dfrac{1}{8}$. (11)1. (12)xye^y. (13)$-\ln(\cos 1)$. (14)-1.

三、解答题

(15)$\dfrac{2}{3}$. (16)$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$;$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)-f_2'(1,1)$. (17)$\dfrac{1}{4}$.

(18)$y(-1)=0$是$y(x)$的极小值;$y(1)=1$是$y(x)$的极大值.

(19)证明略. (20)$\dfrac{5\pi}{4}$. (21)$\arctan\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0$.

(22)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,其中$k$为任意常数.

(23)$a=2$;$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$,$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$,$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x\to0^+$ 时,以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(B)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

(C)$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　(D)$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant1,\end{cases}$则 $f(x)$的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant1.\end{cases}$　　(B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant1.\end{cases}$　　(D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant1.\end{cases}$

(3)反常积分① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$,② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为

(A)①收敛,②收敛.　　(B)①收敛,②发散.

(C)①发散,②收敛.　　(D)①发散,②发散.

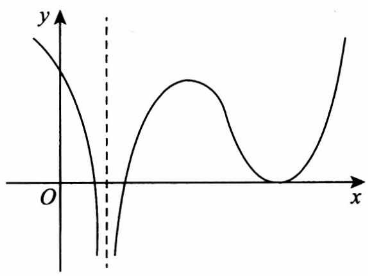
(4)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形如图所示,则

(A)函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点.

(B)函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 3 个拐点.

(C)函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 1 个拐点.

(D)函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点.



(5)设函数 $f_i(x)(i=1,2)$具有二阶连续导数,且 $f''_i(x_0)<0(i=1,2)$.若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$在点(x_0,y_0)处具有公切线 $y=g(x)$,且在该点处曲线 $y=f_1(x)$的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$的曲率,则在 x_0 的某个邻域内,有

(A)$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$.　　(B)$f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$.

(C)$f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$.　　(D)$f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$.

(6)已知函数 $f(x,y)=\frac{e^x}{x-y}$,则

(A)$f'_x-f'_y=0$.　　(B)$f'_x+f'_y=0$.

(C)$f'_x-f'_y=f$.　　(D)$f'_x+f'_y=f$.

(7)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是

(A)$\boldsymbol{A}^T$与$\boldsymbol{B}^T$相似.　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}^{-1}$相似.

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$相似.　　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$相似.

(8)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2,则

(A)$a>1$.　　　　(B)$a<-2$.

(C)$-2<a<1$.　　　　(D)$a=1$ 或 $a=-2$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$的斜渐近线方程为________.

(10)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

(11)以 $y=x^2-e^x$ 与 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为________.

(12)已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则当 $n\geqslant2$ 时,$f^{(n)}(0)=$________.

(13)已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动,记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0,则当点 P 运动到点(1,1)时,l 对时间的变化率是________.

(14)设矩阵$\begin{pmatrix} a & -1 & -1\\ -1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$等价,则 $a=$________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$,求 $f'(x)$,并求 $f(x)$的最小值.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $z=z(x,y)$由方程$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定,求 $z=z(x,y)$的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域,计算二重积分$\iint\limits_D\dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

已知 $y_1(x)=e^x,y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程

$$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$$

的两个解. 若 $u(-1)=e,u(0)=-1$,求 $u(x)$,并写出该微分方程的通解.

(20)(本题满分 11 分)

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant1)$与$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$围成的平面区域,求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$在$\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$上连续,在$\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$内是函数$\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$的一个原函数,且 $f(0)=0$.

(Ⅰ)求 $f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$上的平均值;

(Ⅱ)证明 $f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$内存在唯一零点.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\1 & 0 & a\\a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\2 & -3 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(D). (3)(B). (4)(B). (5)(A). (6)(D). (7)(C). (8)(C).

二、填空题

(9)$y=x+\frac{\pi}{2}$. (10)$\sin 1-\cos 1$. (11)$y'-y=2x-x^2$. (12)$5\cdot 2^{n-1}$. (13)$2\sqrt{2}v_0$. (14)2.

三、解答题

(15)$e^{\frac{1}{3}}$. (16)$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1;\end{cases}$最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. (17)极大值 $z(-1,-1)=1$.

(18)$1-\frac{\pi}{2}$. (19)$u(x)=-(2x+1)e^{-x}$;通解为 $y=C_1e^x-C_2(2x+1)$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

(20)$\frac{18}{35}\pi$;$\frac{16}{5}\pi$. (21)(Ⅰ)$\frac{1}{3\pi}$. (Ⅱ)证明略.

(22)(Ⅰ)$a=0$. (Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

(23)(Ⅰ)$\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. (Ⅱ)$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$

2015 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)下列反常积分中收敛的是

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

(2)函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内

(A)连续.　　(B)有可去间断点.

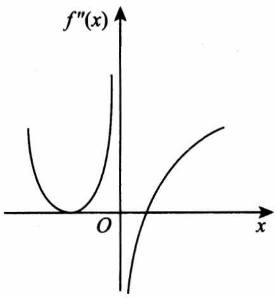
(C)有跳跃间断点.　　(D)有无穷间断点.

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 若 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续，则

(A)$\alpha-\beta>1$.　　(B)$0<\alpha-\beta\leqslant1$.

(C)$\alpha-\beta>2$.　　(D)$0<\alpha-\beta\leqslant2$.

(4)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其二阶导函数 $f''(x)$的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$的拐点个数为



(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.

(5)设函数 $f(u,v)$满足 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$与$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$依次是

(A)$\frac{1}{2}$，0.　　(B)0，$\frac{1}{2}$.

(C)$-\frac{1}{2}$，0.　　(D)0，$-\frac{1}{2}$.

(6)设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

(7)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$.　　(B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$.　　(D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(8)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　　(B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　(D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)设 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=3t+t^3,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$________.

(10)函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$________.

(11)设函数 $f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$. 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$________.

(12)设函数 $y=y(x)$是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$取得极值 3，则 $y(x)=$________.

(13)若函数 $z=z(x,y)$由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=$________.

(14)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，-2，1，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

[redacted]

(15)(本题满分 10 分)

设函数

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,\quad g(x)=kx^3.$$

若 $f(x)$与 $g(x)$在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$及直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{2}$所围成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

(17)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$满足

$$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x,\quad f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x,\quad f(0,y)=y^2+2y,$$

求 $f(x,y)$的极值.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant2,y\geqslant x^2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数

$$f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$零点的个数.

(20)(本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比. 现将一初始温度为 120 ℃的物体在 20 ℃恒温介质中冷却，30 min 后该物体温度降至 30 ℃，若要将该物体的温

度继续降至 21 ℃,还需冷却多长时间.

(21)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$上具有二阶导数,$f(a)=0$,$f'(x)>0$,$f''(x)>0$. 设 $b>a$,曲线 $y=f(x)$在点$(b,f(b))$处的切线与 x 轴的交点是$(x_0,0)$,证明 $a<x_0<b$.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

(23)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

答案速查

一、选择题

(1)(D).　(2)(B).　(3)(A).　(4)(C).　(5)(D).　(6)(B).　(7)(D).　(8)(A).

二、填空题

(9)48.　(10)$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3,\cdots)$.　(11)2.　(12)$e^{-2x}+2e^{x}$.　(13)$-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$.　(14)21.

三、解答题

(15)$a=-1;b=-\frac{1}{2};k=-\frac{1}{3}$.　(16)$A=\frac{8}{\pi}$.　(17)极小值 $f(0,-1)=-1$.

(18)$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$.　(19)$f(x)$有两个零点.　(20)30 min.

(21)证明略.　(22)(Ⅰ)$a=0$.　(Ⅱ)$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

(23)(Ⅰ)$a=4;b=5$.　(Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量，则 α 的取值范围是

(A)$(2,+\infty)$. (B)$(1,2)$.

(C)$\left(\frac{1}{2},1\right)$. (D)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(2)下列曲线中有渐近线的是

(A)$y=x+\sin x$. (B)$y=x^2+\sin x$.

(C)$y=x+\sin\frac{1}{x}$. (D)$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$.

(3)设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上

(A)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$. (B)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(C)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$. (D)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(4)曲线$\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是

(A)$\frac{\sqrt{10}}{50}$. (B)$\frac{\sqrt{10}}{100}$.

(C)$10\sqrt{10}$. (D)$5\sqrt{10}$.

(5)设函数 $f(x)=\arctan x$. 若 $f(x)=xf'(\xi)$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$

(A)1. (B)$\frac{2}{3}$. (C)$\frac{1}{2}$. (D)$\frac{1}{3}$.

(6)设函数 $u(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则

(A)$u(x,y)$的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

(B)$u(x,y)$的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

(C)$u(x,y)$的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得.

(D)$u(x,y)$的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得.

(7)行列式$\begin{vmatrix}0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}=$

(A)$(ad-bc)^2$. (B)$-(ad-bc)^2$.

(C)$a^2d^2-b^2c^2$. (D)$b^2c^2-a^2d^2$.

(8)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

(A)必要非充分条件.　　(B)充分非必要条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分也非必要条件.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\int_{-\infty}^{1}\dfrac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=$________.

(10)设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$,则 $f(7)=$________.

(11)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的函数,则 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$________.

(12)曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$,则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是________.

(13)一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上,若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$,则该细棒的质心坐标 $\overline{x}=$________.

(14)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程

$$x^2+y^2y'=1-y',$$

且 $y(2)=0$,求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}.$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$.证明:

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b]$;

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$,定义函数列:

$$f_1(x)=f(x),\quad f_2(x)=f[f_1(x)],\quad\cdots,\quad f_n(x)=f[f_{n-1}(x)],\quad\cdots.$$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$,直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$,且

$$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y,$$

求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(C). (3)(D). (4)(C). (5)(D). (6)(A). (7)(B). (8)(A).

二、填空题

(9)$\frac{3}{8}\pi$. (10) 1. (11)$-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$. (12)$\frac{2}{\pi}x+y-\frac{\pi}{2}=0$. (13)$\frac{11}{20}$. (14)$[-2,2]$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}$. (16)极小值为 $y(-1)=0$;极大值为 $y(1)=1$. (17)$-\frac{3}{4}$.

(18)$f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$. (19)证明略. (20)1. (21)$\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\pi$.

(22)(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$. (Ⅱ)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3\\-1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3\\-1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3\\k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(23)证明略.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是

(A)比 x 高阶的无穷小量. (B)比 x 低阶的无穷小量.

(C)与 x 同阶但不等价的无穷小量. (D)与 x 等价的无穷小量.

(2)设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos xy+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=$

(A)2. (B)1.

(C)−1. (D)−2.

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

(A)$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B)$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C)$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导. (D)$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

(4)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

(A)$\alpha<-2$. (B)$\alpha>2$.

(C)$-2<\alpha<0$. (D)$0<\alpha<2$.

(5)设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$

(A)$2yf'(xy)$. (B)$-2yf'(xy)$.

(C)$\frac{2}{x}f(xy)$. (D)$-\frac{2}{x}f(xy)$.

(6)设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k=1,2,3,4)$，则

(A)$I_1>0$. (B)$I_2>0$.

(C)$I_3>0$. (D)$I_4>0$.

(7)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

(A)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(8)矩阵 $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A)$a=0,b=2$.　　　　(B)$a=0$,b 为任意常数.

(C)$a=2,b=0$.　　　　(D)$a=2$,b 为任意常数.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$________.

(10)设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$________.

(11)设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$,则 L 所围平面图形的面积是________.

(12)曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________.

(13)已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$,$y_2=e^x-xe^{2x}$,$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解,则该方程满足条件 $y\big|_{x=0}=0$,$y'\big|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$________.

(14)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵,$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴围成的平面图形,V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积.若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y$,$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算

$$\iint\limits_D x^2\,dx\,dy.$$

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上具有二阶导数,且 $f(1)=1$.证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲线

$$x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$$

上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列$\{x_n\}$满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

(21)(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant e)$.

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

答案速查

一、选择题

(1)(C).　(2)(A).　(3)(C).　(4)(D).　(5)(A).　(6)(B).　(7)(B).　(8)(B).

二、填空题

(9)$\sqrt{e}$.　(10)$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$.　(11)$\frac{\pi}{12}$.　(12)$x+y-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=0$.

(13)$e^{3x}-e^{x}-xe^{2x}$.　(14)-1.

三、解答题

(15)$a=7$;$n=2$.　(16)$a=7\sqrt{7}$.　(17)$\frac{416}{3}$.　(18)证明略.

(19)最长距离为$\sqrt{2}$;最短距离为 1.

(20)(Ⅰ)最小值为 $f(1)=1$.　(Ⅱ)证明略.$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.　(21)(Ⅰ)$\frac{e^2+1}{4}$.　(Ⅱ)$\frac{3(e^2+1)(e^2-3)}{4(e^3-7)}$.

(22)当且仅当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时,存在满足条件的矩阵 $\boldsymbol{C}$,且

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1+k_1+k_2 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix},\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为任意常数}.$$

(23)证明略.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为

(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B)$(-1)^n(n-1)!$.

(C)$(-1)^{n-1}n!$. (D)$(-1)^n n!$.

(3)设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的

(A)充分必要条件. (B)充分非必要条件.

(C)必要非充分条件. (D)既非充分也非必要条件.

(4)设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$,则有

(A)$I_1<I_2<I_3$. (B)$I_3<I_2<I_1$.

(C)$I_2<I_3<I_1$. (D)$I_2<I_1<I_3$.

(5)设函数 $f(x,y)$ 可微,且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A)$x_1>x_2,y_1<y_2$. (B)$x_1>x_2,y_1>y_2$.

(C)$x_1<x_2,y_1<y_2$. (D)$x_1<x_2,y_1>y_2$.

(6)设区域 D 由曲线 $y=\sin x$,$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$,$y=1$ 围成,则 $\iint\limits_D(xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A)π. (B)2.

(C)-2. (D)$-\pi$.

(7)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(8)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)设 $y=y(x)$是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$________.

(10)$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$________.

(11)设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(u)$可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(12)微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$________.

(13)曲线 $y=x^2+x\ (x<0)$上曲率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是________.

(14)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则$|\boldsymbol{BA}^*|=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)若当 $x\to0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量，求常数 k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 11 分)

过点(0,1)作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A.又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成.求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$与极轴围成.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$的表达式；

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\displaystyle\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\dfrac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 x_n，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式$|\boldsymbol{A}|$；

(Ⅱ)当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(D). (5)(D). (6)(D). (7)(C). (8)(B).

二、填空题

(9)1. (10)$\frac{\pi}{4}$. (11)0. (12)$\sqrt{x}$. (13)$(-1,0)$. (14)-27.

三、解答题

(15)(Ⅰ)$a=1$. (Ⅱ)$k=1$.

(16)极大值为$\frac{1}{\sqrt{e}}$;极小值为$-\frac{1}{\sqrt{e}}$. (17)面积为 2;体积为$\frac{2}{3}\pi(e^2-1)$. (18)$\frac{16}{15}$.

(19)(Ⅰ)$f(x)=e^x$. (Ⅱ)拐点为$(0,0)$. (20)证明略.

(21)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)证明略.$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

(22)(Ⅰ)$|\boldsymbol{A}|=1-a^4$.

(Ⅱ)当 $a=-1$ 时,通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数}.$$

(23)(Ⅰ)$a=-1$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)已知当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量,则

(A)$k=1,c=4$. (B)$k=1,c=-4$.

(C)$k=3,c=4$. (D)$k=3,c=-4$.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A)$-2f'(0)$. (B)$-f'(0)$.

(C)$f'(0)$. (D)0.

(3)函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(4)微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为

(A)$a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$. (B)$ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.

(C)$x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$. (D)$x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

(5)设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数,满足 $f(0)>0,g(0)<0$,且 $f'(0)=g'(0)=0$,则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A)$f''(0)<0,g''(0)>0$. (B)$f''(0)<0,g''(0)<0$.

(C)$f''(0)>0,g''(0)>0$. (D)$f''(0)>0,g''(0)<0$.

(6)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx,J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)dx,K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$,则 I,J,K 的大小关系为

(A)$I<J<K$. (B)$I<K<J$.

(C)$J<I<K$. (D)$K<J<I$.

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

(A)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$. (B)$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$. (D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(8)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

(10)微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11)曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$的弧长 $s=$________.

(12)设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(\lambda>0)$,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=$________.

(13)设平面区域 D 由直线 $y=x$,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成,则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$________.

(14)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 f 的正惯性指数为________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}.$$

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$,试求 α 的取值范围.

(16)(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$由参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

确定,求函数 $y=y(x)$的极值和曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

(17)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$可导,且在$x=1$ 处取得极值$g(1)=1$.

求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$具有二阶导数,且曲线 l:$y=y(x)$与直线 $y=x$ 相切于原点. 记 α 为曲线 l 在点(x,y)处切线的倾角,若$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,求 $y(x)$的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明对任意的正整数 n,都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$成立;

(Ⅱ)设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

(20)(本题满分 11 分)

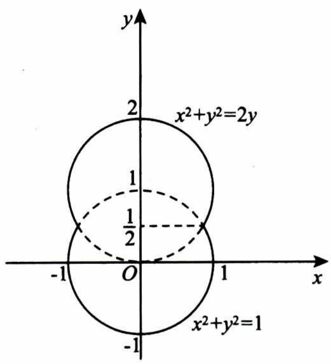
一容器的内侧是由右图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线由

$x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$连接而成.

(Ⅰ)求容器的容积;

(Ⅱ)若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出,至少需要做多少功?

(长度单位为 m,重力加速度为 g m/s^2,水的密度为 10^3 kg/m^3.)



(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=f(x,1)=0$,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(22)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(B). (3)(C). (4)(C). (5)(A). (6)(B). (7)(D). (8)(D).

二、填空题

(9)$\sqrt{2}$. (10)$e^{-x}\sin x$. (11)$\ln(1+\sqrt{2})$. (12)$\frac{1}{\lambda}$. (13)$\frac{7}{12}$. (14)2.

三、解答题

(15)$1<\alpha<3$.

(16)极大值为 $y(-1)=1$,极小值为 $y\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{3}$;凹区间为$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$;凸区间为$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$;拐点为$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(17)$f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$. (18)$y=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.

(19)证明略. (20)(Ⅰ)$\frac{9\pi}{4}$ m^3. (Ⅱ)$\frac{27\times10^3}{8}\pi g$ J.

(21)a. (22)(Ⅰ)$a=5$. (Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(23)(Ⅰ)特征值-1对应的全部特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,特征值1对应的全部特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,特征值0对应的全部特征向量为$k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意非零常数.

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2)设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

(A)$\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$. (B)$\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C)$\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$. (D)$\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3)曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

(A)4e. (B)3e.

(C)2e. (D)e.

(4)设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性

(A)仅与 m 的取值有关. (B)仅与 n 的取值有关.

(C)与 m,n 的取值都有关. (D)与 m,n 的取值都无关.

(5)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F'_2\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A)x. (B)z.

(C)$-x$. (D)$-z$.

(6)$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A)$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$. (B)$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C)$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$. (D)$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

(7)设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是

(A)若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\leqslant s$. (B)若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$.

(C)若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\leqslant s$. (D)若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$.

(8)设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)三阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$________.

(10)曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为________.

(11)函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.

(12)当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时,对数螺线 $r=e^{\theta}$ 的弧长为________.

(13)已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加,宽 w 以 3 cm/s 的速率增加. 则当 $l=12$ cm,$w=5$ cm时,它的对角线增加的速率为________.

(14)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=3$,$|\boldsymbol{B}|=2$,$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\,dt$ 的单调区间与极值.

(16)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\,dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\ (n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(17)(本题满分 11 分)

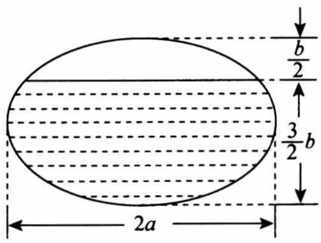
设函数 $y=f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}(t>-1)$$

所确定,其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数,且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$,$\psi'(1)=6$,已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,求函数 $\psi(t)$.

(18)(本题满分 10 分)

一个高为 l 的柱体形贮油罐,底面是长轴为 $2a$,短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放,当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时(如图),计算油的质量.(长度单位为 m,质量单位为 kg,油的密度为常量 ρ,单位为 kg/m^3.)



(19)(本题满分 11 分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 确定 a,b 的值,使等式在变换 $\zeta=x+ay$,$\eta=x+by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=0$.

(20)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,dr d\theta$,其中 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

(21)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=\dfrac{1}{3}$. 证明:存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,

$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(23)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(A). (3)(C). (4)(D). (5)(B). (6)(D). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)$C_1 e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$,其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数. (10)$y=2x$. (11)$-2^n(n-1)!$.

(12)$\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

(13)3 cm/s. (14)3.

三、解答题

(15)$f(x)$的单调增加区间为$(-1,0)$和$(1,+\infty)$;$f(x)$的单调减少区间为$(-\infty,-1)$和$(0,1)$. $f(x)$的极小值为 $f(\pm 1)=0$;极大值为 $f(0)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

(16)(Ⅰ)$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|dt$,理由略. (Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(17)$\psi(t)=\frac{3}{2}t^2+t^3(t>-1)$. (18)$\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl\rho$ kg.

(19)$a=-2,b=-\frac{2}{5}$或 $a=-\frac{2}{5},b=-2$. (20)$\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$. (21)证明略.

(22)(Ⅰ)$\lambda=-1,a=-2$.

(Ⅱ)方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

(23)$a=-1,\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A)1. (B)2.

(C)3. (D)无穷多个.

(2)当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. (B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

(C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. (D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3)设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点(0,0)

(A)不是 $f(x,y)$ 的连续点. (B)不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C)是 $f(x,y)$ 的极大值点. (D)是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(4)设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$

(A)$\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)\,dy$. (B)$\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)\,dy$.

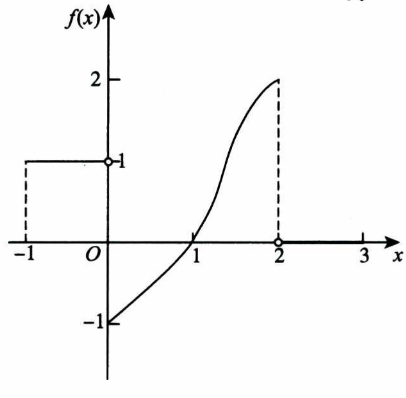
(C)$\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)\,dx$. (D)$\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)\,dx$.

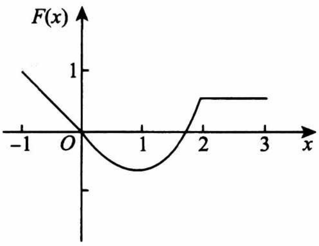
(5)若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间(1,2)内

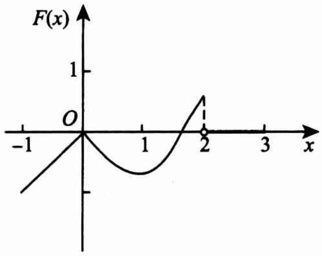
(A)有极值点，无零点. (B)无极值点，有零点.

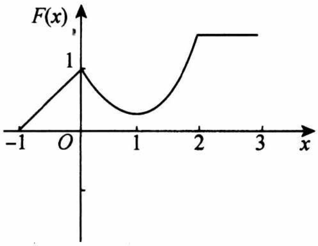
(C)有极值点，有零点. (D)无极值点，无零点.

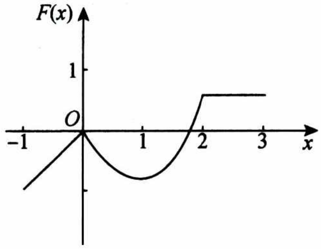
(6)设函数 $y=f(x)$ 在区间[-1,3]上的图形如图所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(7)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵.若$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的伴随矩阵为

(A)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(C)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(8)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为

(A)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)曲线$\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$在(0,0)处的切线方程为__________.

(10)已知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\,\mathrm{d}x=1$,则 $k=$__________.

(11)$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\,\mathrm{d}x=$ __________.

(12)设 $y=y(x)$是由方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 确定的隐函数,则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ __________.

(13)函数 $y=x^{2x}$在区间(0,1]上的最小值为__________.

(14)设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$__________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18)(本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)\ (x\geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$,当曲线 $y=y(x)$ 过原点时,其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2,求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

(19)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

(20)(本题满分 12 分)

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi<x<0$ 时,曲线上任一点处的法线都过原点;当 $0\leqslant x<\pi$ 时,函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存在点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$;

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)\,(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(22)(本题满分 11 分)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(D). (4)(C). (5)(B). (6)(D). (7)(B). (8)(A).

二、填空题

(9)$y=2x$. (10)-2. (11)0. (12)-3. (13)$e^{-\frac{2}{e}}$. (14)2.

三、解答题

(15)$\frac{1}{4}$. (16)$x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C$,其中 C 为任意常数.

(17)$dz=(f_1'+f_2'+yf_3')\,dx+(f_1'-f_2'+xf_3')\,dy$;$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''$.

(18)$\frac{17\pi}{6}$. (19)$-\frac{8}{3}$. (20)$y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(21)证明略.

(22)(Ⅰ)$\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+C_1(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,其中 C_1 为任意常数;$\boldsymbol{\xi}_3=C_2(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+C_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$,其中 C_2,C_3 为任意常数. (Ⅱ)证明略.

(23)(Ⅰ)$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$. (Ⅱ)$a=2$.

2008年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

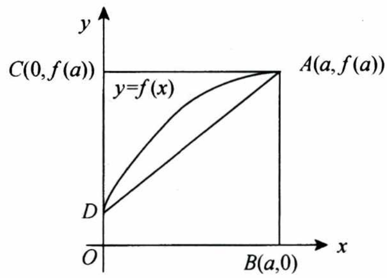
一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分. 下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1)设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(2)如图，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于



(A)曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B)梯形 $ABOD$ 的面积.

(C)曲边三角形 ACD 的面积.

(D)三角形 ACD 的面积.

(3)在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$. (B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$. (D)$y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4)设函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有

(A)1个可去间断点，1个跳跃间断点. (B)1个可去间断点，1个无穷间断点.

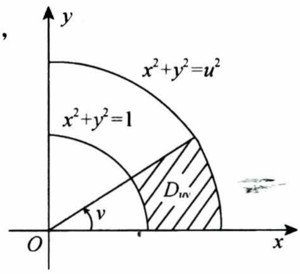
(C)2个跳跃间断点. (D)2个无穷间断点.

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B)若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛. (D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6)设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D_{uv} 为右图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$



(A)$vf(u^2)$. (B)$\frac{v}{u}f(u^2)$.

(C)$vf(u)$. (D)$\frac{v}{u}f(u)$.

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆. (B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆. (D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(8)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)已知函数 $f(x)$连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$________.

(10)微分方程$(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$________.

(11)曲线 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 在点$(0,1)$处的切线方程是________.

(12)曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为________.

(13)设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=$________.

(14)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$.若行列式$|2\boldsymbol{A}|=-48$,则 $\lambda=$________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x=x(t), \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$确定,其中 $x(t)$ 是初值问题$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0, \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$的解,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18)(本题满分 11 分)

计算$\displaystyle\iint\limits_D\max\{xy,1\}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$是区间$[0,+\infty)$上具有连续导数的单调增加函数,且 $f(0)=1$.对任意的 $t\in[0,+\infty)$,直线$x=0$,$x=t$,曲线 $y=f(x)$以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体.若该旋转体的侧面积在数值上等于其体积的 2 倍,求函数 $f(x)$的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明积分中值定理:若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$;

(Ⅱ)若函数 $\varphi(x)$具有二阶导数,且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$,$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$,则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$,使得$\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式$|A|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当a为何值时，该方程组有唯一解，并求x_1；

（Ⅲ）当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

(23)（本题满分10分）

设A为3阶矩阵，α_1,α_2为A的分别属于特征值$-1,1$的特征向量，向量α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

（Ⅰ）证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

（Ⅱ）令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求$P^{-1}AP$.

答案速查

一、选择题

(1)(D).　(2)(C).　(3)(D).　(4)(A).　(5)(B).　(6)(A).　(7)(C).　(8)(D).

二、填空题

(9)2.　(10)$x(C-e^{-x})$,其中 C 为任意常数．　(11)$y=x+1$.　(12)$(-1,-6)$.　(13)$\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

(14)-1.

三、解答题

(15)$\frac{1}{6}$.　(16)$(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1]$.　(17)$\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$.　(18)$\frac{19}{4}+\ln 2$.

(19)$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.　(20)证明略．　(21)最大值为 72,最小值为 6.

(22)(Ⅰ)证明略．　(Ⅱ)$a\neq 0$ 时,$x_1=\frac{n}{(n+1)a}$.

(Ⅲ)$a=0$ 时,通解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

(23)(Ⅰ)证明略．　(Ⅱ)$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$

(A) 0.　　(B) 1.

(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

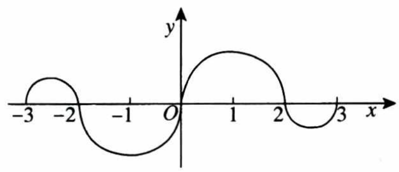
(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上的图形分别为直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.



(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(5) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.

(C) 2.　　(D) 3.

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)\,(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

(8)设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(9)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(10)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A)合同且相似.

(B)合同，但不相似.

(C)不合同，但相似.

(D)既不合同，也不相似.

二、填空题：11～16 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

(12)曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\ y=1+\sin t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________.

(13)设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$__________.

(14)二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为________.

(15)设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(16)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

三、解答题：17～24 小题，共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的单调、可导函数，且满足

$$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数，求 $f(x)$.

(18)(本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\,(a>1,0\leqslant x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

(Ⅰ)求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；

(Ⅱ)当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

(19)(本题满分 11 分)

求微分方程 $y''[x+(y')^2]=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定. 设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$,$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2.\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases} \qquad ①$$

与方程组

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \qquad ②$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(24)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(A). (3)(C). (4)(D). (5)(D). (6)(D). (7)(C). (8)(B).
(9)(A). (10)(B).

二、填空题

(11)$-\frac{1}{6}$. (12)$1+\sqrt{2}$. (13)$\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$. (14)$y=C_1 e^{3x}+C_2 e^{x}-2e^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

(15)$2\left(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'\right)$. (16)1.

三、解答题

(17)$f(x)=\ln(\sin x+\cos x),x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. (18)(Ⅰ)$\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2$. (Ⅱ)$a=e$ 时 V 最小,为 πe^2.

(19)$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$. (20)$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}=0;\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=1$. (21)证明略. (22)$\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

(23)当 $a=1$ 时,公共解为 $\boldsymbol{x}=k(-1,0,1)^T$($k$ 为任意常数);

当 $a=2$ 时,唯一公共解 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^T$.

(24)(Ⅰ)$\boldsymbol{B}$ 的特征值为$-2,1,1$.$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值-2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$(k_1 为任意非零常数).$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^T$,且 k_2,k_3 为不全为零的任意常数.验证略.

(Ⅱ)$\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

2006年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1～6小题,每小题4分,共24分.

(1)曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为________.

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

(3)反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$ ________.

(4)微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

(5)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

(6)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为2阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

二、选择题:7～14小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(7)设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

(8)设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x=0$ 外处处连续,$x=0$ 是其第一类间断点,则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是

(A)连续的奇函数.　　(B)连续的偶函数.

(C)在 $x=0$ 间断的奇函数.　　(D)在 $x=0$ 间断的偶函数.

(9)设函数 $g(x)$ 可微,$h(x)=e^{1+g(x)}$,$h'(1)=1$,$g'(1)=2$,则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3-1$.　　(B) $-\ln 3-1$.

(C) $-\ln 2-1$.　　(D) $\ln 2-1$.

(10)函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$.　　(B) $y''-y'-2y=3e^x$.

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$.　　(D) $y''+y'-2y=3e^x$.

(11)设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(12)设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量,$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列选项正确的是

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(14)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$,再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$,记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

(A)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　　(B)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

(C)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　(D)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

(16)(本题满分 10 分)

求 $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

(17)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

(18)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 10 分)

证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ)若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=4t-t^2 \end{cases}(t\geqslant 0)$.

(Ⅰ)讨论 L 的凹凸性;

(Ⅱ)过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0,y_0),并写出切线的方程;

(Ⅲ)求此切线与 L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

答案速查

一、填空题

(1)$y=\frac{1}{5}$.　(2)$\frac{1}{3}$.　(3)$\frac{1}{2}$.　(4)$y=Cx\mathrm{e}^{-x}$,其中 C 为任意常数.　(5)$-\mathrm{e}$.　(6)2.

二、选择题

(7)(A).　(8)(B).　(9)(C).　(10)(D).　(11)(C).　(12)(D).　(13)(A).　(14)(B).

三、解答题

(15)$A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.　(16)$-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\ln(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}})-x+C$,其中 C 为任意常数.

(17)$\frac{\pi}{2}\ln 2$.　(18)(Ⅰ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.证明略.　(Ⅱ)$\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

(19)证明略.　(20)(Ⅰ)证明略.　(Ⅱ)$f(u)=\ln u$.

(21)(Ⅰ)L 是凸的.　(Ⅱ)切点为(2,3),切线方程为 $y=x+1$.　(Ⅲ)$\frac{7}{3}$.

(22)(Ⅰ)证明略.　(Ⅱ)$a=2,b=-3$.通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

(23)(Ⅰ)$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3;对应于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$($k_1,k_2$ 为不全为零的任意常数),对应于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$(k_3 为非零的任意常数),其中 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1～6 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(1)设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=$ ________.

(2)曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ ________.

(4)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为________.

(5)当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量,则 $k=$ ________.

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

二、选择题:7～14 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)处处可导. (B)恰有一个不可导点.

(C)恰有两个不可导点. (D)至少有三个不可导点.

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”,则必有

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

(9)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A)$\dfrac{1}{8}\ln 2+3$. (B)$-\dfrac{1}{8}\ln 2+3$.

(C)$-8\ln 2+3$. (D)$8\ln 2+3$.

(10)设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)$ 是正值连续函数,a,b 为常数,则

$$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$$

(A)$ab\pi$. (B)$\dfrac{ab}{2}\pi$.

(C)$(a+b)\pi$. (D)$\dfrac{a+b}{2}\pi$.

(11)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A)$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　　　(B)$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C)$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　　　(D)$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(12)设函数 $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则

(A)$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$的第一类间断点.

(B)$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$的第二类间断点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$的第二类间断点.

(D)$x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$的第一类间断点.

(13)设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是

(A)$\lambda_1\neq0$.　　　　(B)$\lambda_2\neq0$.

(C)$\lambda_1=0$.　　　　(D)$\lambda_2=0$.

(14)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant2)$阶可逆矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则

(A)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.　　　　(B)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

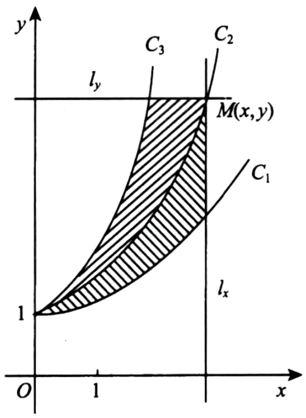
(C)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.　　　　(D)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

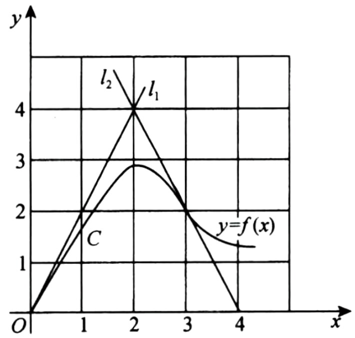
设函数 $f(x)$连续,且 $f(0)\neq0$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

(16)(本题满分 11 分)



如图,C_1 和 C_2 分别是 $y=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像,过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图像.过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y.记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$;C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$.如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$,求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

(17)(本题满分 11 分)



如图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4).设函数 $f(x)$具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在(0,1)内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$.证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(22)(本题满分 9 分)

确定常数 a,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

答案速查

一、填空题

(1)$-\pi dx$.　(2)$y=x+\frac{3}{2}$.　(3)$\frac{\pi}{4}$.　(4)$y=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$.　(5)$\frac{3}{4}$.　(6)2.

二、选择题

(7)(C).　(8)(A).　(9)(A).　(10)(D).　(11)(B).　(12)(D).　(13)(B).　(14)(C).

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}$.　(16)$x=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$.　(17)20.　(18)$y=2x+\sqrt{1-x^2}$.　(19)证明略.

(20)最大值为 3,最小值为 -2.

(21)$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.　(22)$a=1$.

(23)当 $k\neq 9$ 时,$\boldsymbol{x}=c_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}+c_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}$;

当 $k=9$ 时,若 $r(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{x}=c_3(1,2,3)^{\mathrm{T}}$;若 $r(\boldsymbol{A})=1$,$\boldsymbol{x}=c_4(-b,a,0)^{\mathrm{T}}+c_5(-c,0,a)^{\mathrm{T}}(a\neq 0)$,以上 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 均为任意常数.